平成31年度 神戸大学工学部第3年次編入学試験 問題用紙
数　学

（平成30年8月22日実施）
（その1）

注意 1: 答案は各問題ごとに指定された答案用紙に記入すること．
注意 2: 本問題用紙は試験終了後に回収するので持ち帰らないこと．

1．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ と $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle, \quad W_2 = \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \rangle$$

ただし $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle$ は $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を表す．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 $A = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

(3) 3 次正方行列 B で，$B\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$，かつ，すべての $\boldsymbol{u} \in W_1$ に対して $B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ となるものを求めよ．

2．$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}), \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と定める．ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積とする．また，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を A の固有値とする（ただし $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$）．以下の各問に答えよ．

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と，各 $i = 1, 2, 3$ について固有値 λ_i に対応する A の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ で $\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$ を満たすものを一つずつ求めよ．また，その $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ について $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)$（ただし $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$）を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を (1) で求めたベクトルとし，$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$f(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3)$ を c_1, c_2, c_3 で表せ．

(3) $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とする．S における $f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，および，それらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ を求めよ．

平成３１年度 神戸大学工学部第３年次編入学試験 問題用紙
数　学

（平成 30 年 8 月 22 日実施）
（その２）

注意 1: 答案は各問題ごとに指定された答案用紙に記入すること．
注意 2: 本問題用紙は試験終了後に回収するので持ち帰らないこと．

３．xy 平面上の 4 点 $P=(1,0), Q=(3,0), R=(1,2\pi), S=(3,2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた（境界上の点も含む）領域を D とする．関数 $f(x,y)=(4x-x^2)(\sin y+2)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ．ただし D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である．

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

４．xy 平面の第 1 象限（$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy=1, xy=9$ と 2 本の直線 $y=x, y=4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x=\dfrac{u}{v}, y=uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\,dx\,dy$$